

Gabriela Streinu-Cercel Gabriela Constantinescu Gabriela Oprea Manuela Prajea
Boris Singer Gheorghe Stoianovici Costel Chiteș Ioan Marinescu Romeo Ilie

MATEMATICĂ

Manual pentru clasa a XI-a

M1

- Filiera teoretică, profil real,
specializarea matematică-informatică
- Filiera vocațională, profil militar MAPN,
specializarea matematică-informatică



SIGMA

I. Elemente de calcul matricial și sisteme de ecuații liniare

Matrice

Sisteme de ecuații liniare și determinanți

1. Permutări	3
2. Tabel de tip matricial. Matrice, mulțimi de matrice. Operații cu matrice: adunarea, înmulțirea unei matrice cu scalar	8
3. Operații cu matrice: înmulțirea	13
4. Sisteme de ecuații liniare	20
5. Determinanți de ordin n	27
6. Proprietățile determinanților	30
7. Rangul unei matrice. Matrice inversabilă	35
8. Sisteme liniare de m ecuații cu n necunoscute, $n \leq 4$	41
9. Interpretarea geometrică a sistemelor liniare cu două necunoscute	49

II. Elemente de analiză matematică

Mulțimea numerelor reale. Funcții reale. Șiruri de numere reale

1. Mulțimi de puncte pe dreapta reală	53
2. Funcții reale de variabilă reală	59
3. Noțiunea de șir. Șiruri monotone. Șiruri mărginite	70
4. Limita unui șir	74
5. Convergență și mărginire	80
6. Operații cu șiruri care au limită. Șiruri remarcabile	84
7. Calculul limitelor în cazuri de nedeterminare	90

Limite de funcții

1. Limita unei funcții într-un punct. Limite laterale	100
2. Operații cu limite de funcții. Limitele funcțiilor elementare	106
3. Criterii de existență a limitei unei funcții	114
4. Metode de eliminare a nedeterminărilor	117
5. Asimptotele unei funcții	123

Continuitatea funcțiilor

1. Continuitate punctuală; puncte de discontinuitate; continuitate pe un interval. Operații cu funcții continue.	129
2. Studiul existenței soluțiilor reale ale unor ecuații și semnul unei funcții continue pe un interval	137

Derivabilitatea funcțiilor

1. Funcții care admit derivată. Funcții derivabile	144
2. Derivate laterale. Derivatele unor funcții elementare	149
3. Operații cu funcții derivabile. Derivate de ordinul al doilea	156
4. Proprietăți generale ale funcțiilor derivabile pe un interval	167
5. Calculul unor limite de funcții cu ajutorul derivatelor	176
6. Rolul derivatei de ordinul întâi în studiul funcțiilor	179
7. Rolul derivatei de ordinul doi în studiul funcțiilor	186

Reprezentarea grafică a funcțiilor

1. Reprezentarea grafică a funcțiilor	192
2. Aplicații ale unor proprietăți locale sau globale ale funcțiilor	203
3. Rezolvarea grafică a unor ecuații. Șirul lui Rolle	205
4. Reprezentarea grafică a conicelor (cerc, elipsă, hiperbolă, parabolă)	209

Indicații și răspunsuri	222
-------------------------------	-----



1. Permutări

Cu elementele unei mulțimi finite se pot forma mai multe permutări. De exemplu, $(2, 3, 5, 4, 1)$, $(2, 1, 3, 4, 5)$, $(3, 4, 2, 1, 5)$ sunt permutări ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Cu elementele mulțimii $\{((, \odot, \otimes)\}$ putem forma 6 permutări diferite:

$((, \odot, \otimes), ((, \otimes, \odot), (\odot, ((, \otimes), (\odot, \otimes, ((), (\otimes, \odot, ((), (\otimes, ((, \odot).$

Reprezentarea $((, \odot, \otimes)$ nu este o permutare deoarece nu este dată ordinea elementelor. Într-o permutare cu n elemente, fiecare element trebuie să ocupe o anumită poziție numerotată de la 1 la n .

Noțiunea de permutare

În cele ce urmează ne vom ocupa de permutările mulțimii finite de numere naturale $A = \{1, 2, \dots, n\}$.

Fie $\varphi : A \rightarrow A$ o bijecție a mulțimii A și notăm $\varphi(1) = i_1$, $\varphi(2) = i_2, \dots, \varphi(n) = i_n$. Funcția φ poate fi reprezentată printr-un tablou cu două linii:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_k & \dots & i_n \end{pmatrix};$$

prima linie indică poziția k pe care se află elementul i_k din linia a doua, sau, cu alte cuvinte, locul ocupat de elementul i_k în șirul finit $(i_1, i_2, \dots, i_n)$.

Definiție.

Fie mulțimea $A = \{1, 2, \dots, n\}$. O funcție bijectivă $\sigma : A \rightarrow A$ se numește *permutare de gradul n* . Mulțimea tuturor permutărilor de gradul n se notează cu S_n . Permutările din S_n le vom nota cu litere grecești: $\varphi, \sigma, \tau, \dots$ (citim: fi, sigma, tau, ...)

O permutare $\sigma \in S_n$ poate fi notată prin:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

sau

$(i_1 i_2 \dots i_n)$, unde $i_1 = \sigma(1), i_2 = \sigma(2), \dots, i_n = \sigma(n)$.

1) În câte moduri se pot clasa 4 elevi care participă la un concurs sportiv, dacă nu sunt 2 elevi pe același loc în clasament?

2) Care dintre următoarele tablouri reprezintă permutări?

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

i) $(1 \ 2 \ 3 \ 4)$

j) $(5 \ 2 \ 1 \ 4)$

k) $(1 \ 3 \ 4 \ 2)$

3) Scrie toate permutările din S_3 .

Observații.

• O permutare σ este o funcție bijectivă și, ca urmare, toate elementele $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$ sunt distincte și aparțin mulțimii $\{1, 2, \dots, n\}$. În clasa a X-a s-a demonstrat că numărul de funcții bijective definite pe o mulțime dată, cu n elemente, cu valori în aceeași mulțime, este $n!$ (citim: n factorial).

♦ S_n , mulțimea permutărilor de grad n , are $n!$ elemente.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$$

Compunerea permutărilor. Proprietăți

Definiție.

Fie $\sigma, \tau \in S_n$ două permutări de ordinul n . Permutarea $\sigma \circ \tau$ este definită prin relația $(\sigma \circ \tau)(k) = \sigma(\tau(k))$, $\forall k = \overline{1, n}$ și se numește *produsul* (sau *compunerea*) *permutărilor* σ, τ (în această ordine).

$$\text{Dacă } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \text{ și } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \dots & \tau(n) \end{pmatrix},$$

$$\text{atunci } \sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(\tau(1)) & \sigma(\tau(2)) & \dots & \sigma(\tau(n)) \end{pmatrix}.$$

Produsul $\sigma \circ \tau$ se mai notează $\sigma\tau$.

Notăm: $\sigma \circ \sigma = \sigma\sigma = \sigma^2$; $\sigma^3 = \sigma^2\sigma$; $\sigma^4 = \sigma^3\sigma, \dots, \sigma^{n+1} = \sigma^n\sigma$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Nu are sens să vorbim despre produsul a două permutări de ordin diferit (ele fiind definite pe mulțimi diferite).

EXEMPLU



Să considerăm permutările de gradul al 4-lea

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Produsul $\sigma \circ \tau$ este permutarea

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \text{ iar}$$

$$\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se observă că $\sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma$.

$$\sigma^2 = \sigma\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^3 = \sigma^2\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Proprietățile înmulțirii (compunerii) permutărilor rezultă din proprietățile compunerii funcțiilor bijective.

4) Completează permutările:

$$\text{a) } \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & ? \end{pmatrix};$$

$$\text{b) } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & ? & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } \tau = (2 \ 3 \ 5 \ 4 \ ?).$$

5) Câte elemente au mulțimile de permutări S_1, S_2 și S_5 ?

6) Scrie toate permutările σ din S_4 pentru care $\sigma(2) = 3$ și $\sigma(3) = 4$.

7) Fie permutările de gradul al 3-lea

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ și } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Determină $\sigma\tau, \tau\sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4, \sigma^5, \sigma^6$.

b) Determină $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\sigma^p = e$,

$$\text{unde } e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

8) Care egalitate este adevărată?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

9) Fie permutările:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculează: $\sigma\tau, \tau\varphi, \sigma\varphi, \varphi\sigma, \varphi\tau, (\sigma\tau)\varphi, \sigma(\tau\varphi), \sigma(\tau\sigma), \sigma^2\tau, \sigma\tau^2$.

10) Fie permutarea $\sigma \in S_4$,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \text{ Determină:}$$

a) $\sigma^2, \sigma^2\sigma, \sigma\sigma^2$;

b) $\sigma^3, \sigma^3\sigma, \sigma\sigma^3$.

1) Înmulțirea permutărilor este asociativă:

$$\forall \sigma, \tau, \theta \in S_n, \sigma(\tau\theta) = (\sigma\tau)\theta$$

2) Permutarea $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$, numită *permutare identică*

de gradul n , este elementul neutru pentru înmulțirea permutărilor:

$$\forall \sigma \in S_n, e\sigma = \sigma e = \sigma.$$

3) Pentru orice permutare $\sigma \in S_n$ există permutarea notată σ^{-1} , numită *inversa permutării* σ , cu $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = e$.

Observații.

◆ Compunerea permutărilor nu este comutativă. Mai precis, oricare ar fi $n \geq 3$, există φ, σ permutări de gradul n cu $\varphi\sigma \neq \sigma\varphi$.

◆ $\sigma^0 = e$; $\sigma^{-n} = (\sigma^{-1})^n, \forall n \in \mathbb{N}$;
se poate arăta că $\sigma^a \sigma^b = \sigma^{a+b}$ și $(\sigma^a)^b = \sigma^{ab}, \forall a, b \in \mathbb{Z}$.

◆ Inversa unei permutări $\sigma: A \rightarrow A$ este chiar funcția inversă $\sigma^{-1}: A \rightarrow A$ asociată funcției bijective σ .

EXEMPLU

1) Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; atunci $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Verificare:

$$\sigma\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\sigma^{-1}\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Să calculăm $\sigma^2, \sigma^3, \sigma^4, \sigma^5$.

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \sigma^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = e,$$

de unde $\sigma^3 = \sigma^{-1}$, $\sigma^5 = \sigma$, deoarece $\sigma^3 \cdot \sigma = e$ și

$$\sigma^5 = \sigma^4 \cdot \sigma = e \cdot \sigma = \sigma.$$

2) Să rezolvăm ecuația $\sigma \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Soluție.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

11) Fie permutările $\sigma, \tau, \theta \in S_3$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ și}$$

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determină:

a) $\sigma\tau$; $(\sigma\tau)\theta$; $(\theta\tau)\sigma$

b) $\tau\sigma$; $\sigma(\tau\theta)$; $\theta(\tau\sigma)$

Ce observi?

Arată că $\sigma^2\tau^2 \neq (\sigma\tau)^2$.

12) Fie σ, τ, φ permutări din S_n .

Arată că:

$$\sigma\tau = \tau\sigma \Leftrightarrow \sigma^2\tau^2 = (\sigma\tau)^2;$$

$$\sigma\tau = \sigma\varphi \Leftrightarrow \tau = \varphi;$$

$$\tau\sigma = \varphi\sigma \Leftrightarrow \tau = \varphi.$$

13) Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_4$.

Determină $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\sigma^p = \sigma^{-1}$.

14) Notăm permutările de gradul al 3-lea cu:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Completează tabelul de mai jos, punând în fiecare pătrățel pe linia i și coloana j produsul $\sigma_i\sigma_j$:

	e	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5
e				σ_3		
σ_1						
σ_2						
σ_3					σ_2	
σ_4	σ_4					
σ_5						

Inversiuni, semnul unei permutări

Definiție. Fie σ o permutare de grad n , $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(i) & \dots & \sigma(j) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}. \text{ Perechea ordonată}$$

(i, j) , $1 \leq i < j \leq n$ se numește *inversiune a permutării* σ dacă $\sigma(i) > \sigma(j)$. Notăm cu $m(\sigma)$ numărul tuturor inversiunilor permutării σ .

Observăm că, într-o permutare $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$,

inversiunea (i, j) , $i < j$ este o pereche de elemente din prima linie pentru care în linia a doua avem $\sigma(i) > \sigma(j)$.

EXEMPLU



Permutarea de gradul al 3-lea, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, are inver-

siunile $(1, 2)$ și $(1, 3)$. Perechea $(2, 3)$ nu este inversiune a permutării σ , deci permutarea σ are două inversiuni ($m(\sigma) = 2$).

Observații.

◆ Permutarea identică e are 0 inversiuni, deci $m(e) = 0$.

Reciproc, dacă $m(\sigma) = 0$, atunci σ este permutarea identică.

◆ Permutarea $\sigma \in S_n$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ cu

$\sigma(k) = n - k + 1$, $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$ are numărul maxim de inversiuni posibile deoarece toate perechile (i, j) , $i < j$ sunt inver-

siuni pentru σ . Ca urmare, $m(\sigma) = \frac{n(n-1)}{2} = C_n^2$ este numărul tuturor submulțimilor de două elemente dintr-o mulțime de n elemente. Pentru orice permutare $\sigma \in S_n$ avem $0 \leq m(\sigma) \leq C_n^2$.

Definiție. Numărul $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)}$ se numește *semnul* (signatura) permutării σ , unde $\sigma \in S_n$.

Semnul unei permutări este $+1$ sau -1 și $\varepsilon: S_n \rightarrow \{-1, 1\}$ este funcție.

Definiție. Permutarea $\sigma \in S_n$ este *pară*, respectiv *impară*, dacă are un număr par, respectiv impar de inversiuni, adică $\varepsilon(\sigma) = +1$, respectiv $\varepsilon(\sigma) = -1$.

EXEMPLU



Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. În linia a doua numărăm de

câte ori fiecare element este mai mare decât unul dintre succesorii săi. După primul element, 4, urmează elementele mai mici 3, 2, 1; după 5 urmează tot trei elemente mai mici; după 3 urmează două elemente mai mici, 2 și 1, iar după 2 urmează un singur element mai mic, 1. În concluzie, numărul de inversiuni ale acestei permutări este $m(\sigma) = 3 + 3 + 2 + 1 = 9$, deci $\varepsilon(\sigma) = (-1)^9 = -1$. Permutarea σ este o permutare impară.

15) Scrie toate inversiunile permutării

$$\sigma \in S_4, \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

16) Fie permutarea de ordinul al 7-lea,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 1 & 4 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Care dintre următoarele perechi sunt inversiuni ale permutării σ ?

$(1, 2)$, $(1, 4)$, $(1, 6)$, $(2, 4)$, $(3, 7)$, $(6, 7)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$.

17) Scrie toate inversiunile permutării

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 1 & 4 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

18) Scrie toate inversiunile permutărilor

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Câte inversiuni au permutările σ , τ , ϕ ?

19) Determină numărul inversiunilor permutărilor σ , $\tau \in S_5$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

20) Determină semnul permutărilor σ , $\tau \in S_5$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

PROBLEME **LIBRIS** **we know books**
10 **20** **POUSE**

● 1. Scrie toate inversiunile permutărilor:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;

c) $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Câte inversiuni au fiecare din permutările σ , τ , φ ?

● 2. Fie permutarea $\sigma \in S_4$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Determină: a) σ^2 , $\sigma^2\sigma$, $\sigma\sigma^2$; b) σ^3 , $\sigma^3\sigma$, $\sigma\sigma^3$.

● 3. Fie permutările de gradul al 2-lea: $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ și

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Completează tabelul alăturat, punând în fiecare pătrățel compunerea dintre permutarea indicată de linie și cea indicată de coloană.

	e	σ
e		
σ		

Realizează un astfel de tabel pentru permutările de gradul al 4-lea.

● 4. Calculează permutările φ , σ , τ , dacă:

$$\varphi \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \tau \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

● 5. Pentru fiecare $\sigma \in S_3$, determină: $\min\{k \in \mathbb{N}^* \mid \sigma^k = e\}$.

● 6. Arată că pentru orice $\sigma \in S_n$, $n \in \mathbb{N}^*$ există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\sigma^k = e$.

● 7. Se dau numerele reale $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Determină permutarea $\sigma \in S_n$ pentru care suma $S_\sigma = \sum_{k=1}^n a_k a_{\sigma(k)}$ este:
a) minimă; b) maximă.

● 8. a) Arată că, pentru orice permutare $\sigma \in S_n$, semnul permutării σ este $\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$.

b) $\forall \sigma, \tau \in S_n, \varepsilon(\sigma \cdot \tau) = \varepsilon(\sigma) \cdot \varepsilon(\tau)$.

● 9. Fie $n \geq 2$, $i, j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, $i \neq j$.

$$\text{Permutarea } \tau_{ij} \text{ din } S_n, \tau_{ij}(k) = \begin{cases} k, & \text{pentru } k \neq i, k \neq j \\ j, & \text{pentru } k = i \\ i, & \text{pentru } k = j \end{cases}$$

se numește *transpoziție* (se mai notează și $(i j)$).

Calculează numărul de inversiuni ale următoarelor transpoziții din S_6 :

$$(1 \ 2), (2 \ 4), (1 \ 5), (1 \ 6), (3 \ 6).$$

● 10. Ce transpoziții de ordinul 4 nu se află în mulțimea: $\{(1 \ 2); (1 \ 3); (2 \ 3); (2 \ 4); (3 \ 4)\}$?

Care sunt transpozițiile de ordinul al 5-lea?

● 11. Fie $(i \ j) \in S_n$ o transpoziție de ordinul n . Arată că $(i \ j)^2 = e$, adică orice transpoziție este propria sa inversă.

● 12. Compune permutările:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 7 & 6 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ și $(1 \ 2)$;

b) $(1 \ 2)$ și $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 7 & 6 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 7 & 6 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ și $(5 \ 7)$;

d) $(5 \ 7)$ și $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 7 & 6 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Ce observi?

● 13. Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 7 & 6 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

- Calculează $(1 \ 2)\sigma$.
- Calculează $(2 \ 4)(1 \ 2)\sigma$.
- Calculează $(3 \ 7)(2 \ 4)(1 \ 2)\sigma$.
- Calculează $(4 \ 6)(3 \ 7)(2 \ 4)(1 \ 2)\sigma$. Ce obții?
- Scrie σ sub forma unui produs de transpoziții.

● 14. Demonstrează că orice permutare de ordinul n se descompune în produsul a cel mult n transpoziții.

● 15. Arată că orice transpoziție este impară.

● 16. Calculează permutările $\sigma, \tau \in S_5$, dacă:
 $\sigma(1 \ 3)(2 \ 3)(4 \ 5) = e$, $(1 \ 3)(2 \ 3)(4 \ 5)\tau = e$.

● 17. Află permutarea $\tau \in S_n$, în fiecare din cazurile:

a) $\tau(1) + 1 = \tau(2) + 2 = \dots = \tau(n) + n$;

b) $\tau(1) - 1 = \tau(2) - 2 = \dots = \tau(n) - n$;

c) $\frac{\tau(1)}{1} = \frac{\tau(2)}{2} = \dots = \frac{\tau(n)}{n}$.